Лекция 1

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ

1. Введение

Так уж устроена природа, что большое число явлений в различных областях естествознания, таких как физика, химия, биология, экология, инженерное дело и др. достаточно полно может быть описано лишь с привлечением дифференциальных уравнений. Области, где только такое описание и возможно, постоянно расширяются. Однако, нахождение решений краевых задач для дифференциальных уравнений, к которым изучаемые явления сводятся, оказывается далеко не простым делом. Точные решения, обычно в виде ряда или интеграла, удается найти только для очень узкого класса задач. Как правило, это задачи для довольно простых уравнений, задаваемых (что более существенно) в областях простой геометрической формы. Среди методов, которые позволяют найти такие решения, отметим метод разделения переменных, метод интегральных преобразований, метод функции Грина. Были потрачены значительные усилия на подходящую модификацию подобных методов и на создание новых методов, которые давали бы решение в замкнутой форме для более широкого класса задач. Однако все эти усилия не смогли обеспечить запросов практики в решении все более сложных задач, что в конечном счете привело к необходимости разработки приближенных методов.

Сегодня среди приближенных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений самыми распространенными являются сеточные методы. Причиной тому служит их большая универсальность и относительная простота реализации. Применительно к дифференциальным уравнениям термин "сеточные методы" часто используется в качестве синонима терминов "метод конечных разностей" и "разностные методы", однако нам представляется вполне оправданной более широкая трактовка этого понятия, включающая в него и метод конечных элементов (МКЭ).

Метод конечных элементов завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач механики, математической физики и техники. Такая популярность метода объясняется целым рядом причин, среди которых на первое место должны быть поставлены его большая универсальность, общая для всех сеточных методов, простота физической интерпретации и алгоритмичность. Однако мы не разделяем часто высказываемое мнение о том, что схемы МКЭ лучше разностных схем. Не разделяем мы и противоположную точку зрения. Не представляет большого труда доказать, что хорошая разностная схема лучше плохой схемы МКЭ, а хорошая схема МКЭ лучше плохой разностной схемы. Но ведь целесообразно проводить сравнение лишь в сопоставимых ситуациях, а это требует большей квалификации. Видимо, различные подходы должны разумно дополнять друг друга. И, тем не менее, мы должны отметить, что, если для построения традиционно используемыми методами хорошей разностной схемы требуется сравнительно высокая квалификация исследователя, то, зачастую, для построения схемы МКЭ аналогичного качества достаточно выполнить последовательность вполне формальных процедур.

Так что же представляет собой МКЭ? Если не побояться обрушить на свою голову священный гнев рыцарей МКЭ, то очень грубо и неточно можно было бы сказать, что МКЭ — это хороший способ построения хороших разностных схем. Однако лучше было бы сказать, что МКЭ — это способ построения дискретных моделей континуальной среды, описываемой краевыми задачами для дифференциальных уравнений, сохраняющий важнейшие свойства последней. Но и это определение не отражает полностью существа дела. Если смотреть шире, то МКЭ — это технология решения краевых задач для дифференциальных уравнений на ЭВМ.

Напрашивается следующая параллель между эволюцией понятий решения и разностной схемы. На первых этапах исследования дифференциальных уравнений под решением понималась функция, задаваемая аналитически, и, тем самым, поддающаяся полному анализу. По мере усложнения уравнений и задач для них права гражданства обрели решения, задаваемые рядами или интегралами. И, наконец, в настоящее время под решением чаще всего понимают численное решение. Чтобы проанализировать какое-либо явление, теперь уже нужно провести серию расчетов при различных значениях входящих в уравнения и граничные условия параметров. С другой стороны, с момента зарождения понятия разностной схемы и до недавнего времени используемая в расчетах разностная схема должна была быть выписана в явном виде. Это было необходимо не только для того,чтобы иметь возможность проводить непосредственные вычисления или программировать на ЭВМ, но и чтобы оценить такие качества схемы как симметрия, аппроксимация, устойчивость, сходимость и др. Лишь с развитием технологии МКЭ от этого требования удалось отказаться и довольствоваться алгоритмом построения системы алгебраических уравнений, вместо явного их вида. При этом основные свойства схемы оказываются не зависящими от ее явного вида.

Мы постоянно подчеркиваем близость метода конечных разностей и МКЭ, однако имеется принципиальное различие между этими методами в подходе к приближенному решению — в первом из них аппроксимируется уравнение и граничные условия, а во втором — само искомое решение. Такая тесная связь формулировки МКЭ с приближенным решением обязывает нас подойти к понятию решения с бо́льшим вниманием, чем это было бы необходимо при изложении метода конечных разностей.

2. Двухточечная краевая задача

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений не являются тем объектом, где наиболее полно проявились достоинства метода конечных элементов — безусловно, пальма первенства здесь принадлежит двумерным и трехмерным задачам. Однако двухточечные краевые задачи представляют собой простую, но достаточно содержательную модель, на примере которой можно осветить многие основные аспекты метода конечных элементов.

Рассмотрим задачу о нахождении функции $u := u(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению *второго порядка*

$$Lu := -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Граничные условия (2) называются *однородными граничными условиями первого рода*. Будем предполагать, что для коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) выполнены условия

$$p(x) \geqslant c_0 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Уравнением (1) описывается целый ряд установившихся физических процессов, зависимость которых от двух других пространственных переменных либо несущественна, либо вовсе отсутствует. Если ввести в рассмотрение величину

$$w(x) := -p(x)\frac{du}{dx}, \tag{4}$$

называемую *потоком*, то уравнение (1) можно рассматривать как выраженный в дифференциальной форме закон сохранения этой величины, а (4) тогда есть математическое выражение того конкретного физического закона, который лежит в основе описываемого процесса. Например, в теории теплопроводности это закон Фурье, в теории фильтрации жидкости и газа — закон Дарси, в теории диффузии — закон Нернста и т.д.

3. Классическое решение

Пусть $\overline{I} = \{x|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — замкнутый отрезок, а $I = \{x|\, 0 < x < 1\}$ — его внутренняя часть. Обозначим через $C^m(\overline{I}), \quad m = 0, 1, \ldots$ множество функций, заданных на $\overline{I}$ и имеющих там непрерывные производные до порядка m.

Определение 1. Решением *(классическим)* задачи (1), (2) называется такая непрерывная на замкнутом отрезке $\overline{I}$ и дважды непрерывно-дифференцируемая на интервале I функция $u(x)$ $(u(x) \in C^2(I) \bigcap C(\overline{I}))$, которая удовлетворяет граничным условиям (2) и в *каждой* точке $x \in I$ обращает уравнение (1) в тождество.

Пусть

$$p(x) \in C^1(\overline{I}), \quad q(x) \in C(\overline{I}), \quad f(x) \in C(\overline{I}). \tag{5}$$

Хорошо известно, что имеет место

Теорема 1. *Если выполнены условия* (3), (5)*, то решение задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Условия (3), вообще говоря, существенно ослабить нельзя. Если, например, разрешить коэффициенту $p(x)$ обращаться в нуль, то решения задачи (1), (2) может не существовать.

Пример 1. Пусть, например,

$$p(x) \equiv x, \quad q(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1. \tag{6}$$

Тогда общим решением уравнения (1) будет функция $u = c_1 + c_2 \ln x - x$. Чтобы удовлетворить граничному условию (2) при $x = 1$ нужно положить $c_1 = 1$, а чтобы выполнялось граничное условие при $x = 0$, необходимы равенства $c_1 = c_2 = 0$. Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2 переопределена, несовместна, и, следовательно, задача (1), (2), (6) решения не имеет.

Если же отказаться от второго из условий (3), то появятся случаи, когда решения задачи (1), (2) либо не существует, либо существует, но не единственно.

Пример 2. Если коэффициенты уравнения (1) задаются соотношениями

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv f(x) = -\pi^2, \tag{7}$$

то общим решением рассматриваемого дифференциального уравнения будет функция $u(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x + 1$, которая ни при каких значениях c_1 и c_2 не удовлетворяет граничным условиям (2) и задача (1), (2), (7) решения не имеет.

Пример 3. Если

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv -\pi^2, \quad f(x) \equiv 2\pi \cos \pi x,$$

то функция $u(x) = (c_1 - x)\sin \pi x$ будет решением задачи (1), (2) при любом $c_1 = \text{const}$, т.е. решение неединственно.

Обратимся к условиям (5). Что будет, если, например, $f(x)\overline{\in}C(\overline{I})$? Такое предположение является вполне реальным. Если принять, например, тепловую интерпретацию уравнения (1), то $f(x)$ представляет собой плотность распределенных тепловых источников, которые вполне могут быть равномерно распределены на одной части I и полностью отсутствовать на другой. Ясно, что в смысле определения 1 задача (1), (2) решения иметь не будет. И дело не только в том, что уравнение (1) теряет смысл в точке разрыва функции $f(x)$. В рассматриваемом случае не существует функции, которая удовлетворяла бы уравнению (1) на участках непрерывности $f(x)$ и в то же время принадлежала пространству $C^2(I)$.

Пример 4. Если, например,

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} f_1 = \text{const}, & 0 < x < \xi < 1, \\ f_2 = \text{const}, & \xi < x < 1, \end{cases} \tag{8}$$

то множество функций, удовлетворяющих на $(0, \xi)$ и на $(\xi, 1)$ уравнению (1), (8) и граничным условиям (2), представляет собой двухпараметрическое семейство, задаваемое соотношением

$$u(x) = \begin{cases} c_1 x - f_1 x^2/2, & 0 \leqslant x < \xi, \\ c_2(1-x) + f_2 x(1-x)/2, & \xi < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Для того чтобы эта функция принадлежала $C^2(I)$, необходимо, чтобы она по крайней мере была непрерывной в точке ξ и имела в этой точке непрерывную производную. Выбирая параметры c_1 и c_2 в (9) с учетом указанных требований, находим, что единственной дифференцируемой (один раз) на I функцией семейства (9) является функция

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x[f_2 - f_1 x + \xi(2-\xi)(f_1 - f_2)], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (1-x)[f_2 x + \xi^2(f_1 - f_2)], & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

которая, очевидно, при $f_1 \neq f_2$ не принадлежит $C^2(I)$. Задача (1), (8), (2) решения в смысле определения 1 не имеет.

Для того чтобы придать смысл этой задаче и при $f(x)\overline{\in} C(I)$, необходимо расширить понятие решения в двух направлениях:

— отказаться от требования, чтобы решение непременно принадлежало $C^2(\bar{I})$,

— отказаться от требования удовлетворения уравнения в каждой точке.

Однако делать это нужно достаточно осторожно, чтобы не нарушить единственность и чтобы решение в смысле определения 1 оставалось по возможности (см. замечание 4) решением и в более широком смысле.

4. Обобщенные функции и обобщенные производные

Чтобы дать желаемое расширение понятия решения, нам необходимо ввести в рассмотрение существенно новое понятие — понятие обобщенной производной. Сделаем мы это одновременно с введением понятия обобщенной функции. Для простоты будем рассматривать функции, заданные на всей оси Ox. Обозначим через $\mathcal{D}$ совокупность всех функций $\varphi(x)$, которые бесконечно дифференцируемы на оси Ox и *финитны*. Последнее означает, что каждая функция $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ тождественно равна нулю вне некоторого отрезка: $\varphi(x) \equiv 0$, если $x\overline{\in}(a, b)$; числа a и b — свои для каждой функции $\varphi(x)$. Если $\varphi(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то замыкание указанного отрезка $\overline{(a, b)} = [a, b]$ называется *носителем* функции $\varphi(x)$ и обозначается как $\operatorname{supp}\varphi(x)$.

Примерами функций из $\mathcal{D}$ могут служить: функция "шапочка"

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

ее производные и сдвиги, их произведения с другими бесконечно дифференцируемыми функциями из C^∞ и их линейные комбинации.

Будем называть функции из $\mathcal{D}$ *основными*.

Обобщенной функцией f (над пространством $\mathcal{D}$) называется всякий *линейный непрерывный* функционал, определенный на множестве основных функций $\mathcal{D}$.

Значение функционала (обобщенной функции) f на основной функции φ будем записывать в виде (f, φ).

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порожденный локально суммируемой на Ox функцией *) $f(x)$:

$$(f, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{11}$$

Обобщенные функции, определяемые *локально суммируемыми* на Ox функциями при помощи соотношения (11), называются *регулярными обобщенными функциями*. Именно с ними мы и будем иметь дело. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными*.

Пример сингулярной обобщенной функции дает дельта-функция Дирака:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \tag{12}$$

Пусть $f(x) \in C^1(-\infty, \infty)$, а $\varphi(x)$ — основная функция, т.е. $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Это равенство и принимается за определение обобщенной производной обобщенной функции: если f — обобщенная функция, то другая обобщенная функция, обозначаемая f' и определяемая соотношением

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \tag{13}$$

называется ее *обобщенной производной*. Все обобщенные функции являются бесконечно дифференцируемыми (в обобщенном смысле).

Покажем, например, как дифференцируется разрывная функция. Пусть $\chi(x)$ — *функция Хевисайда*, или "*ступенька*", т.е.

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \infty. \end{cases} \tag{14}$$

*) Функция $f(x)$ называется *локально суммируемой* на $-\infty < x < \infty$, если интеграл Лебега от ее модуля по любому конечному отрезку ограничен.

Функция $\chi(x)$ локально суммируема, и определяемая ею обобщенная функция есть

$$(\chi, \varphi) = \int_0^\infty \varphi dx.$$

Найдем производную этой обобщенной функции. В силу (13) и (12)

$$(\chi', \varphi) = -(\chi, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Мы показали, что *производной "единичной ступеньки"* является дельта-функция Дирака.

Найдем вторую производную

$$(\chi'', \varphi) = -(\chi', \varphi') = (\chi, \varphi'') = \int_0^\infty \varphi''(x)dx = -\varphi'(0) = -(\delta, \varphi') = (\delta', \varphi).$$

Будем говорить, что функция $v(x)$ принадлежит *пространству Соболева*

$$H^m(I) \equiv W_2^m(I), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

если

$$\|v\|_{m,I} \equiv \|v\|_m := \left[\int_0^1 (v^2 + v'^2 + ... + v^{(m)^2})dx\right]^{1/2} < \infty, \tag{15}$$

где $v^{(k)}$ — обобщенная производная k-го порядка.

Очевидно, что пространство Соболева $H^0(I)$ есть не что иное как хорошо известное пространство $L_2(I)$.

Введем также в рассмотрение подпространство $H_0^m(I)$ пространства $H^m(I)$, полагая

$$H_0^m(I) := \{v(x) \in H^m(I) | v(0) = ... = v^{(m-1)}(0) = v(1) = ... = v^{(m-1)}(1) = 0\}. \tag{16}$$

Замечание 1. Так же как пространство $L_2(I)$ является пополнением по норме

$$\|v\|_0 = (\int_0^1 v^2 dx)^{1/2}$$

пространства непрерывных функций $\mathrm{C}(\bar{I})$ (и даже пространства бесконечно дифференцируемых финитных на I функций) пространство Соболева

$H^m(I)$ является пополнением пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^m(\bar{I})$ по норме (15). При этом пополнением по указанной норме пространства бесконечно дифференцируемых финитных на I функций будет пространство $H_0^m(I)$.

5. Решение почти всюду

Обозначим через $C_0^\infty(I)$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых принадлежит I.

Определение 2. Функция $u(x) \in H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$ называется решением (почти всюду) задачи (1), (2), если

$$(Lu - f, v) := \int_0^1 (Lu - f) v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(I). \tag{17}$$

Замечание 2. Требование принадлежности $u(x)$ пространству $H_0^1(I)$ понадобилось исключительно для того, чтобы специально не оговаривать выполнение для $u(x)$ граничных условий (2), ибо для каждой функции из $H_0^1(I)$ они выполнены.

Теорема 2. *Если $f(x) \in L_2(I)$, $q(x)$ ограничена на I, а $p(x)$ имеет ограниченную производную, то при выполнении условий* (3) *решение (почти всюду) задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Очевидно, что если функция $u(x)$ есть решение задачи (1), (2) в смысле определения 1 и принадлежит $H^2(I)$, то она будет решением этой задачи и в смысле определения 2.

Не следует думать, что решение задачи (1), (2) в смысле определения 2 может не удовлетворять уравнению (1) на достаточно большом множестве, например, на целом отрезке хотя и сколь угодно малой длины. Если $u(x)$ есть решение в смысле определения 2, то $Lu - f$ может быть отлично от нуля или быть неопределенным лишь на множестве меры нуль, т.е. $(Lu - f) = 0$ почти всюду на I.

Замечание 3. Может сложиться впечатление, что в определении 2 мы отказываемся от требования непрерывности не только вторых производных решения, но и первых (см. определение пространства $H^2(I)$). На самом деле это не так. В силу теоремы вложения Соболева $H^2(I) \subset C^1(\bar{I})$, т.е. всякая функция из $H^2(I)$ непрерывно дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна.

Принимая во внимание это замечание и вновь обращаясь к задаче (1), (8), (2) находим, что функция (10) является ее решением в смысле определения 2. Если же в (10) $f_1 = f_2$, т.е. $f(x) \in C(I)$, то решение в смысле определения 2 совпадает с решением в смысле определения 1.

Замечание 4. Не всякое классическое решение является решением почти всюду. Например, классическим решением задачи (1), (2) с коэффиентами $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ и $f(x) = x^{-\alpha}$, $1 \neq \alpha < 2$ является функция

$$u(x) = [(2-\alpha)(1-\alpha)]^{-1}\left(x - x^{2-\alpha}\right) \in C^2(I)\bigcap C(\bar{I}),$$

которая принадлежит $H^2(I)$ только при $\alpha < 1/2$.

6. Упражнения

1. Для уравнения (1) поставить неоднородные граничные условия первого рода и в предположениях теоремы 1 доказать существование и единственность классического решения.

2. Для уравнения (1) поставить другие граничные условия (не первого рода) и дать определение классического решения.

3. Дать объяснение примеров 2 и 3.

4. Пусть $\xi \in (0,1)$, $\quad I_1 = (0,\xi), I_2 = (\xi,1)$. Назовем решением задачи (1), (2) такую функцию $u(x) \in C^2(I_1 \bigcup I_2) \bigcap C^1(I) \bigcap C(\bar{I})$, которая удовлетворяет граничным условиям (2) и в каждой точке $x \in I_1 \bigcup I_2$ обращает уравнение (1) в тождество. Доказать, что при выполнении условий (5) $u \in C^2(I)$ и совпадает с классическим решением в смысле определения 1.

5. Дать определение классического решения следующей задачи:

$$u'''' = f(x), \quad x \in I, \quad u(0) = u''(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

6. Доказать бесконечную дифференцируемость функции "шапочка"$\omega(x)$.

7. Дать определение решения почти всюду для задачи из упражнения 1.

8. Найти решение из $H_0^1(0,1)\bigcap H^2(0,1)$ уравнения $pu'' = 1$, где

$$p = \begin{cases} p_1 & 0 < x < 1/2, \\ p_2 & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

9. Для уравнения (1), (6) поставить такие граничные условия, при которых решение существует и единственно.